

Espaços vetoriais isomorfos

Professor: Gabriel Miranda

Resumo

Espaços Vetoriais Isomorfos

Seja $V = \mathbb{P}_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma **base** de $\mathbb{P}_3$.

Então, $\exists v \in \mathbb{P}_3 \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ e $\exists w \in \mathbb{P}_3 \mid w = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4$

E os componentes dos vetores formam quádruplas pertencentes ao $\mathbb{R}^4$, ou seja, $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$.

Sendo a soma dos dois vetores igual a:

$$\begin{aligned} v + w &= (a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4) + (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4) \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + (a_3 + b_3)v_3 + (a_4 + b_4)v_4 \end{aligned}$$

E a multiplicação por escalar:

$$\alpha v = \alpha a_1v_1 + \alpha a_2v_2 + \alpha a_3v_3 + \alpha a_4v_4 = a_1(\alpha v_1) + a_2(\alpha v_2) + a_3(\alpha v_3) + a_4(\alpha v_4)$$

É possível concluir que:

$$v_B + w_B = (v + w)_B \text{ e } \alpha v_B = (\alpha v)_B$$

Portanto, é possível dizer que os espaços $\mathbb{P}_3$ e $\mathbb{R}^4$ são isomorfos, pois a soma e a multiplicação por escalar estão definidas nos dois espaços e $\dim(\mathbb{P}_3) = \dim(\mathbb{R}^4)$.

Teorema: Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são **isomorfos** se, e somente se,

$$\boxed{\dim(U) = \dim(V)}$$

Ex. 1: $\dim(M(2,2)) = \dim(\mathbb{P}_3) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, logo são espaços vetoriais isomorfos.

Ex. 2: $\dim(M(3,1)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, logo são espaços vetoriais isomorfos.

Ex. 3: $\dim(M(5,1)) = \dim(\mathbb{P}_4) = 5$, logo são espaços vetoriais isomorfos.